Resistência e Corrente Elétrica

Nesta prática discutiremos os conceitos de resistência e corrente elétrica e sua relação com as propriedades microscópicas dos materiais. Veremos a origem das leis de Ohm através de um modelo de condução conhecido como modelo de Drude, que dá uma explicação microscópica para a resistência elétrica. Nos experimentos, investigaremos como varia o potencial ao longo de um condutor e determinaremos a resistividade elétrica do mesmo.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento ou componente, o aluno deverá consultar o professor para esclarecimentos.

Quando for trocar a função de um multímetro, desconecte os fios, gire o botão e só então reconecte ao circuito. Lembre-se que as entradas para voltímetro e ohmímetro são diferentes das entradas para amperímetro.

I. As Leis de Ohm

Em 1827, Georg Simon Ohm, físico e matemático alemão, publicou os resultados do que é hoje conhecido como as leis de Ohm. Nessa época, Ohm trabalhava como professor de física e matemática numa escola colegial em Colônia, e usava o laboratório da escola para experiências com circuitos elétricos, que eram uma novidade então (Volta havia desenvolvido a bateria eletrolítica poucos anos antes). Os resultados dessas experiências foram publicados no trabalho "O circuito galvânico investigado matematicamente". Ohm descobriu que a corrente que atravessa um fio condutor é proporcional à diferença de potencial aplicada, à área da seção transversal do fio e inversamente proporcional ao comprimento.

A proporcionalidade entre a corrente e a diferença de potencial observada em alguns tipos de materiais é hoje conhecida como a primeira lei de Ohm, e os componentes que apresentam essa propriedade são chamados de ôhmicos. A razão V/I denota o quanto de tensão tem de ser aplicada para passar certa corrente em um dispositivo de circuito. Assim, quanto maior for a dificuldade que o dispositivo impõe a passagem da corrente, maior deve ser a tensão aplicada para estabelece um certo valor de corrente. Logo dize-se que a razão V/I é uma medida da dificuldade imposta pelo dispositivo à passagem da corrente elétrica e por isso é denominada de resistência elétrica (R). A unidade de resistência no SI foi denominada Ohm (Ω) em homenagem a Georg Simon Ohm. A formulação matemática dessa lei é:

$$V = RI \tag{1}$$

Outra observação feita por Ohm em seus experimentos foi que a resistência elétrica é proporcional ao comprimento do condutor e inversamente proporcional a área da seção transversal, o que ficou conhecido como a segunda lei de Ohm, o que pode ser escrita como:

$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{2}$$

O coeficiente de proporcionalidade é conhecido como resistividade, e é uma característica de cada material. A tabela 1 mostra a resistividade de alguns deles.

Tabela 1 – resistividade de alguns materiais. Observe a diferença nas ordens de grandeza

Material	**ρ (Ω.m)**	**Material**	**ρ (Ω.m)**
Prata	$1{,}59.\ 10^{-8}$	Germânio	$4{,}6.\ 10^{-1}$
Cobre	$1{,}7.\ 10^{-8}$	Silício	$6{,}4.\ 10^{2}$
Alumínio	$2{,}82.\ 10^{-8}$	Parafina	10^{17}

Os metais têm resistividade da ordem de 10^{-8} Ω.m, enquanto os isolantes têm resistividade superior a 10^{10}. A resistividade dos semicondutores (como o germânio e o silício) encontra-se entre esses extremos.

Uma grande inspiração para o trabalho de Ohm foi o trabalho de Fourier sobre a condução de calor, publicado anos antes. Fourier descobriu que a condução de calor entre dois pontos é proporcional à diferença de temperatura entre eles e a condutividade térmica do meio que os separa. Fazendo a analogia, a corrente faz o papel do calor, o potencial faz o papel da temperatura e a resistência faz o papel do inverso da condutância térmica.

A tensão e a corrente são grandezas macroscópicas, que se referem a todo o condutor, e por esse motivo as equações 1 e 2 são também chamadas de lei de Ohm macroscópicas. Combinando as equações 1 e 2, podemos escrever:

$$\frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A} \tag{3}$$

Mas V / L é o campo elétrico que age sobre o condutor, e I / A é chamado de densidade de corrente, simbolizado por J. Logo:

$$E = \rho J \tag{4}$$

Essa equação é usualmente escrita em termos da condutividade σ, que é o inverso da resistividade:

$$J = \sigma E \tag{5}$$

A densidade de corrente e o campo elétrico podem ser definidas à partir de características microscópicas e por isso a equação 5 é chamada de *lei de Ohm microscópica.*

II. O modelo de Drude

No final do século XIX, foi descoberto o elétron, partícula carregada que seria responsável pelos fenômenos elétricos. Havia então necessidade de explicar os fenômenos usando a idéia do elétron, incluindo as leis de Ohm. Isso foi feito por Paul Drude em 1900.

Da eletrostática sabia-se que o valor do potencial elétrico é o mesmo em todos os pontos de um condutor em equilíbrio eletrostático. Em outras palavras, nessa situação não há diferença de potencial entre dois pontos quaisquer de um metal eletrostaticamente carregado. No entanto, em um material condutor os elétrons mais externos aos átomos estão fracamente ligados aos núcleos. Devido à energia térmica, esses elétrons estão livres para se mover aleatoriamente ao longo do condutor (por isso são chamados de elétrons de condução). Portanto, uma visão simplista de um material condutor, seria de um mar de elétrons livres em movimento aleatório devido às flutuações térmicas, e um conjunto de íons de fundo, provenientes dos átomos dos quais os elétrons de condução se originaram.

Na presença de um campo elétrico, surge uma força sobre os elétrons livres, fazendo com que além do movimento aleatório eles possuam um movimento ordenado na direção do campo. Quando isso acontece, o condutor não está mais em equilíbrio eletrostático. Uma análise preliminar pode dar a impressão que sob a influência dessa força a velocidade dessas cargas aumentaria indefinidamente. Na verdade, isso não ocorre devido a colisões entre os elétrons de condução e os íons de fundo. Para descrever este mecanismo de condução podemos utilizar um modelo microscópico conhecido como *modelo de Drude*, cujas principais hipóteses são:

i. Não há interação elétron-elétron ou elétron-íon no intervalo entre as colisões;
ii. As colisões ocorrem abruptamente e os íons não se movem;
iii. Existe um tempo médio entre colisões (Δt);
iv. Após cada colisão, o elétron perde a "memória" sobre sua trajetória e velocidade;

Então vamos assumir que um condutor de comprimento ΔL (figura 1) está submetido a uma diferença de potencial V. A aplicação de V faz com que apareça um campo elétrico de intensidade $E = V / \Delta L$ no condutor. Logo, um dado elétron de condução será submetido a uma força elétrica (F=-eE), sendo acelerado até atingir uma velocidade v durante um tempo Δt. Então, podemos escrever que a variação de velocidade atingida por esse elétron é:

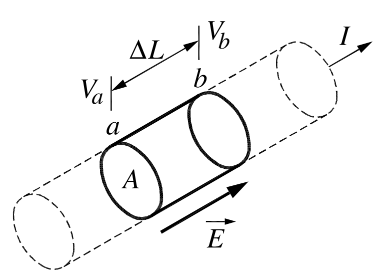

Figura 1 – Condutor submetido à diferença de potencial

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -eE \Rightarrow \Delta v = -\frac{eE\Delta t}{m} \tag{6}$$

A quantidade de carga que flui através da seção transversal do condutor pode ser escrita da forma $\Delta Q = n(-e)Av_m\Delta t$, onde n representa a densidade volumétrica dos elétrons de condução, e a carga do elétron, A a seção transversal do condutor, v_m a velocidade média de deslocamento dos elétrons e Δt o tempo decorrido. Logo a corrente elétrica que flui através do condutor pode ser escrita da forma:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -neAv_m \tag{7}$$

A velocidade média atingida pelo elétron é:

$$|v_m| = \frac{I}{neA} \tag{8}$$

É importante enfatizar que esse valor médio de velocidade é o valor da velocidade de arraste dos elétrons devido à aplicação do campo e não a velocidade individual dos elétrons, que é, sobretudo, determinada pela agitação térmica. Uma estimativa da velocidade adquirida pelos elétrons devido a agitação térmica pode ser feita considerando um teorema da Física estatística, (denominado *Teorema da Equipartição da Energia*), que estabelece que a cada grau de liberdade de translação dos elétrons contribui com $k_BT/2$ para a energia térmica dos mesmos (k_B é denominada de constante de Boltzman e T é a temperatura). Assim, igualando a energia cinética média dos elétrons com a energia térmica, obtemos:

$$\frac{1}{2}m_e\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_BT \tag{9}$$

Onde m_e é a massa do elétron e $\langle v^2\rangle$ á a média do quadrado das velocidades dos elétrons. De onde tiramos que:

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \tag{10}$$

v_{rms} é usualmente referido como valor quadrático médio da velocidade dos elétrons (do inglês *root mean square*). Fazendo um cálculo dessa velocidade em temperatura ambiente (300 K) e sabendo que $k_B = 1{,}38\times10^{-23}\,J/K$ e $m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg, obtemos que $v_{rms} = 1{,}17\times10^{5}\,m/s$. De fato, esse valor é ainda maior quando se usa a mecânica quântica para fazer o cálculo. Neste caso o valor de velocidade obtido é conhecido como velocidade de Fermi, sendo o seu valor $v_F = 1{,}57\times10^{6}\;m/s$.

Para fim de comparação, vamos estimar a velocidade média de arraste dos elétrons devido ao campo quando uma corrente de 1A atravessa um fio de cobre de 1 mm de raio. A densidade do cobre é de 8,92 g/cm^3 e sua massa atômica é de 63,5g o que diz que a massa de um mol de cobre é de 63,5 g. Como o número de átomos em um mol é dado pela constante de Avogadro N_A = 6,02x10^{23}, o número de átomos por cm^3 no cobre é $6{,}02\times10^{23}\,\dfrac{8{,}92}{63{,}5} = 8{,}46\times10^{22}$ atomos/cm^3. Considerando que cada átomos de cobre contribui com um elétron para a condução, temos que a densidade volumétrica de elétrons $n = 8{,}46\times10^{28}$ atomos/m^3. Assim, usando que a carga do elétron é de $e = 1{,}6\times10^{-19}\,C$, temos, segundo a equação 8, que a velocidade média dos elétrons é:

$$v_m = \frac{I}{neA} = \frac{1}{8{,}46\times10^{28}\times1{,}6\times10^{-19}\left[\pi\left(10^{-3}\right)^2\right]} = 2{,}35\times10^{-5}\,m/s = 8{,}5\;cm/h \tag{11}$$

Vemos então que a velocidade média de arraste dos elétrons devido ao campo é muito menor que a velocidade devido a agitação térmica.

Da quarta hipótese, a velocidade de um elétron após uma colisão tem direção aleatória. No entanto, o que importa é o comportamento coletivo dos elétrons, e não os comportamentos individuais. Assim, fazemos uma média de velocidades sobre todos os elétrons, que resulta que a velocidade após a colisão é nula (v_i = *0*). Assim, podemos escrever:

$$\Delta v = v_f - v_i = v_f \tag{12a}$$

$$v_m = \frac{v_f + v_i}{2} = \frac{v_f}{2} \tag{12b}$$

Logo, a variação de velocidade que um elétron sofre (Δv na equação 6) é o dobro da velocidade média (v_m na equação 8). Usando esse fato, escrevemos:

$$-2\frac{I}{neA} = -\frac{eE\Delta t}{m} \tag{13}$$

E o tempo médio entre colisões pode ser estimado como:

$$\Delta t = 2\frac{mI}{ne^2AE} \tag{14}$$

Uma outra grandeza usualmente definida é o livre caminho médio l, que expressa a distância percorrida pelos elétrons entre colisões sucessivas. Sabendo que o tempo médio entre colisões é Δt e que a velocidade térmica média dos elétrons é v_F, o livre caminho médio pode ser calculado como:

$$l = v_F\Delta t = \frac{2v_F mI}{ne^2AE} \tag{15}$$

O campo elétrico pode ser escrito em função da diferença de potencial $E = V/\Delta L$, permitindo reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$V = \frac{2m}{ne^2\Delta t}\frac{\Delta L}{A}I \tag{16}$$

Essa equação mostra que a diferença de potencial é proporcional à corrente, o que é dito pela primeira lei de Ohm. A resistência (razão entre tensão e corrente) é dada por:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{2m}{ne^2 \Delta t} \frac{\Delta L}{A} \tag{17}$$

A resistência elétrica é proporcional ao comprimento do condutor e inversamente proporcional à área da seção transversal, o que concorda com as observações de Ohm. Comparando as equações 5 e 17, vemos que:

$$\rho = \frac{2m}{ne^2 \Delta t} \tag{18}$$

O modelo de Drude fornece uma expressão para a resistividade dos materiais (uma grandeza macroscópica) que depende apenas de grandezas microscópicas (a carga e a massa do elétron, a densidade de elétrons livres e o tempo médio entre colisões).

Embora no tratamento acima tenhamos falado somente em elétrons de condução, podemos fazer o mesmo tratamento para íons (condução iônica) ou mesmo buracos (falta de elétrons).

Experimentos

1. Um condutor em forma de escada percorrido por corrente

a) Neste experimento utilizaremos uma fita condutora de alumínio em forma de escada tal como mostrado na figura 2a. Inicialmente você deverá medir todas as dimensões (comprimento, espessura e largura em cada região).

b) Monte o circuito indicado na figura 2b utilizando uma fita de alumínio e uma resistência $R = 4{,}7\ \Omega$ e potência máxima de 5 W. Ajuste a fonte para obter uma corrente de aproximadamente 0,5 A (nessa situação, a potência dissipada no resistor será cerca de 2,5 W).

c) Para cada uma das três regiões distintas, indicado por I, II e III na figura, meça 5 valores de tensão V em função do comprimento x (assuma $V = 0$ na extremidade da fita).

d) Faça um gráfico da tensão em função do comprimento x, destacando as 3 regiões. Qual o comportamento observado em cada região?

(a) (b)

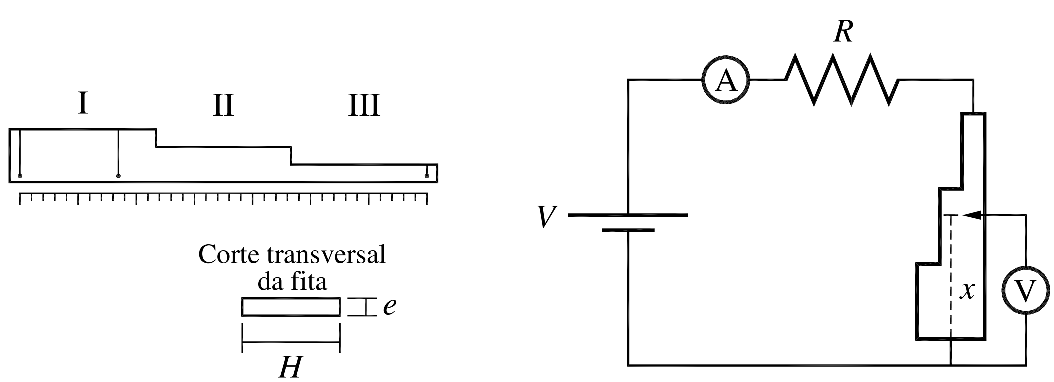

Figura 2– (a) fita condutora de alumínio. (b) Circuito para estudar a tensão sobre a fita condutora.

e) Analise o coeficiente angular da reta em cada uma das regiões do gráfico obtido no item anterior e explique o resultado com base nas áreas transversais da fita metálica.

f) Usando a expressão $E = V / x$, calcule o campo elétrico médio em cada uma das 3 regiões da fita. A partir da geometria da fita e da corrente I, calcule também a densidade de corrente J em cada uma das regiões.

g) Com esses dados, Faá um gráfico em escala linear de E vs. J, verifique a equação 5, e obtenha a condutividade do material. Lembre-se que esse valor é o inverso da resistividade.

h) Usando o valor da resistividade obtido, estime o tempo médio entre colisões. Estime também a velocidade média dos elétrons e o livre caminho médio. Como essas grandezas variam quando a corrente varia? Como o livre caminho médio se compara com as distâncias interatômicas? Discuta esse resultado com o seu professor.

Valor medido para a corrente: ______________________

Resultados das medidas de tensão versus posição em uma fita metálica em forma de escada.

Região	Posição	Tensão	Campo Elétrico	Dens. de corrente
Região I: **Largura da Fita: ______** **Espessura da Fita:_____**				
Região II: **Largura da Fita: ______** **Espessura da Fita:_____**				
Região III: **Largura da Fita: ______** **Espessura da Fita:_____**				
Resistividade do Material:		**Calculada:** **Valor tabelado:**		

2. Um condutor trapezoidal percorrido por corrente (opcional)

a) Vamos usar agora uma outra fita metálica, com formato de trapézio (figura 3). Ligue os terminais da fita a um resistor de 4,7 Ω e ajuste a fonte de tensão para que a corrente na fita seja 0,5 A.

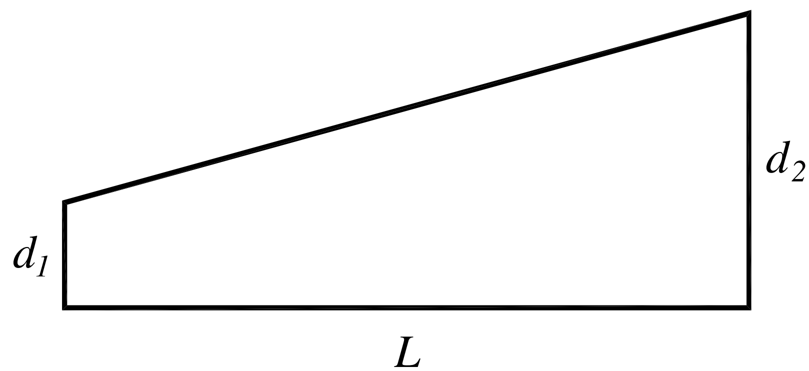

Figura 3 – Fita condutora de alumínio (experimento opcional)

b) Meça todos os parâmetros geométricos da fita.

c) Meça a tensão V em função do comprimento x ao longo da fita (assuma $V = 0$ na extremidade mais fina). Obtenha cerca de 15 pontos.

Características geométricas da fita

d_1	d_2	L	h	I

Resultados das medidas de tensão versus posição em uma fita metálica em forma trapezoidal.

Posição	Tensão	Posição	Tensão

Para determinar a resistividade da placa você precisará encontrar uma equação que descreva o perfil de tensão como função de *x*. Para isso, note que a área transversal cresce linearmente ao longo da placa de modo que:

$$A(x) = d_1 h + (d_2 - d_1) h \frac{x}{L}$$

Onde d_1 e d_2 são as larguras inicial e final, L o comprimento total e h a espessura da placa. A resistência então varia ponto a ponto, mas a corrente total é constante. Temos que integrar a lei de Ohm:

$$V = I \int dR = \frac{\rho I}{h} \int_0^x \frac{dx'}{d_1 + (d_2 - d_1) x' / L}$$

O resultado dessa integral (resolva-a e apresente no relatório) é uma função logarítmica:

$$V(x) = \frac{\rho L I}{(d_2 - d_1).h} \ln\left(1 + \frac{(d_2 - d_1)}{d_1} \frac{x}{L}\right)$$

d) Ajuste a função acima aos pontos obtidos experimentalmente e obtenha a resistividade.